# Informatica Grafica

Un'introduzione

## Rappresentare la Geometria

- \* Operabile da metodi di calcolo automatici
- \* "Grafica Vettoriale"
- \* Partiamo dalla rappresentazione di un punto ....

## Spazi Vettoriale

Uno spazio vettoriale  $\mathcal V$  su un campo  $\mathcal F$  è un insieme con due operazioni

```
+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} (addizione)
          \cdot : \mathcal{F} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V} (prodotto per uno scalare)
tali che, per ogni \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V} e per ogni \alpha, \beta \in \mathcal{F}:
                                                                                      (commutatività dell'add.)
       \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v};
        \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w};
                                                                                         (associatività dell'add.)
        esiste 0 \in \mathcal{V} tale che v + 0 = v;
                                                                                (elemento neutro dell'add.)
                                                                                                  (inversa dell'add.)
        esiste -\mathbf{v} \in \mathcal{V} tale che \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0};
       \alpha \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha \cdot \mathbf{v} + \alpha \cdot \mathbf{w}; (distr. dell'add. rispetto al prod.)
        (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v} + \alpha \cdot \mathbf{v}; (distr. del prod. rispetto all'add.)
       \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{v}) = (\alpha \beta) \cdot \mathbf{v};
                                                                                                   (assoc. del prod.)
                                                                                 (elemento neutro del prod.)
        1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}.
```

#### Combinazione Lineare

siano  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathcal{V}$  e  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathcal{F}$ . Il vettore

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n \in \mathcal{V}$$

è detto combinazione lineare dei vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 

l'insieme di tutte le combinazioni lineari degli elementi di un insieme  $S\subset \mathcal{V}$  è un sottospazio di  $\mathcal{V}$ 

tale sottospazio è detto generato da S ed è denotato come  $\lim S$ 

un insieme di vettori S è linearmente indipendente quando nessuno di essi può essere generato dagli altri

### Basi

un insieme minimale di vettori indipendenti  $\{e_i\}$  che genera uno spazio vettoriale  $\mathcal V$  è detto base

il numero d di vettori di una (ogni) base di  $\mathcal V$  è detto dimensione dello spazio

qualunque elemento  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  si può rappresentare in modo unico come combinazione lineare degli elementi di una base  $\{\mathbf{e}_i\}$  fissata

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{d} v_i \mathbf{e}_i$$

#### Coordinate

il concetto di base, ovvero di sottoinsieme massimale di vettori linearmente indipendenti, è probabilmente il più importante quando si lavora con spazi vettoriali

ogni elemento di uno spazio vettoriale può essere rappresentato in modo unico come combinazione lineare degli elementi di una base.

questo conduce a parametrizzare lo spazio, cioè a rappresentarne ogni elemento con una sequenza ordinata di scalari, le coordinate dell'elemento rispetto alla base fissata.

## Punti

uno spazio affine è un insieme di punti dove lo spostamento tra i punti x e y è ottenuto sommando un vettore v al punto x

un insieme  $\mathcal A$  di punti è detto uno spazio affine modellato sullo spazio vettoriale  $\mathcal V$  se esiste una funzione, detta azione affine

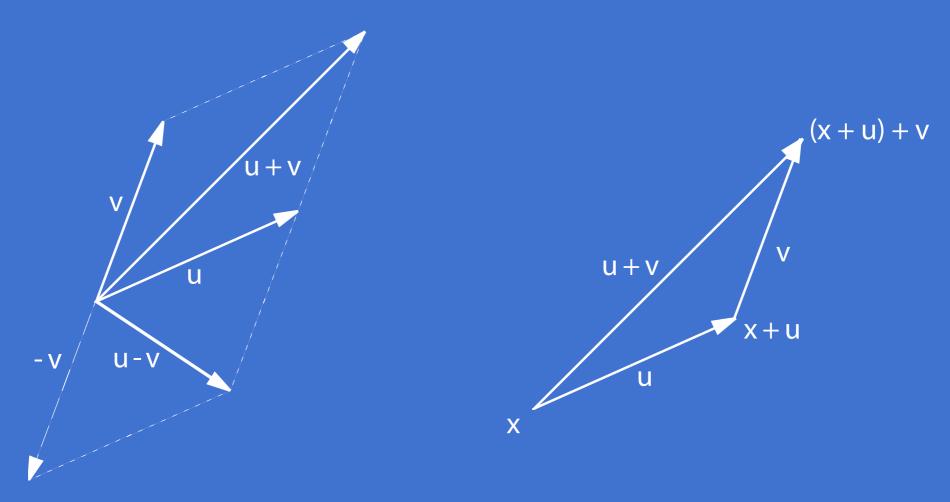
$$\mathcal{A} \times \mathcal{V} \to \mathcal{A}; \quad (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{v}, \quad \text{t.c.}$$

- 1. (x + v) + w = x + (v + w) per ogni  $x \in A$  e  $v, w \in V$ ;
- 2. x + 0 = x per ogni  $x \in A$ , dove  $0 \in V$  è il vettore nullo;
- 3. per ogni coppia  $x, y \in A$  esiste un unico  $(y x) \in V$  tale che

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{y}.$$

#### Vettori visione Grafica

somma e differenza di vettori (regola del parallelogramma)



associatività dello spostamento (somma di punto e vettore) in uno spazio affine

#### Combinazioni Affini

Siano dati i punti  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_d \in \mathbb{E}^n$  e gli scalari  $\alpha_0, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ , con

$$\alpha_0 + \dots + \alpha_d = 1$$

il punto

$$\alpha_0 \mathbf{x}_0 + \dots + \alpha_d \mathbf{x}_d = \sum_{i=0}^d \alpha_i \mathbf{x}_i$$

è detto una combinazione affine di tali punti

l'insieme di tutte le combinazioni affini di un insieme di punti R è detto guscio affine dei punti

un insieme S di punti è detto affinemente indipendente se nessuno di essi apprtiene al guscio affine degli altri

### Rette

il guscio affine di due punti  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in \mathbb{E}^d$  affinemente indipendenti è la retta per essi

aff 
$$\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1\} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \alpha_0 \mathbf{x}_0 + \alpha_1 \mathbf{x}_1, \ \alpha_0 + \alpha_1 = 1\}$$

la retta per due punti si può scrivere anche

$$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (1 - \alpha_1)\mathbf{x}_0 + \alpha_1\mathbf{x}_1, \ \alpha_1 \in \mathbb{R}\}$$

ovvero

$$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \alpha(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0), \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

ovvero

$$\mathsf{aff}\left\{\mathbf{x}_{0},\mathbf{x}_{1}\right\} = \mathbf{x}_{0} + \mathsf{lin}\left\{\mathbf{x}_{1} - \mathbf{x}_{0}\right\}$$

### Piani

il guscio affine di tre punti  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{E}^d$  affinemente indipendenti è il piano cui appartengono

aff 
$$\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \alpha_0 \mathbf{x}_0 + \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2, \ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}$$

il piano per tre punti si può scrivere anche

$$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (1 - \alpha_1 - \alpha_2)\mathbf{x}_0 + \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2, \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

ovvero

$$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \alpha_2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0), \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

ovvero

aff 
$$\{x_0, x_1, x_2\} = x_0 + lin \{x_1 - x_0, x_2 - x_0\}$$

## (Sotto)Spazio e Dimensioni

si dice che  $\mathcal{U}\subset\mathcal{V}$  è un sottospazio di  $\mathcal{V}$  se  $(\mathcal{U},+,\cdot)$  è uno spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni

La dimensione di un sottospazio  $\mathcal{U}\subset\mathcal{V}$  è pari al numero minimo di elementi generatori

La codimensione di un sottospazio  $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$  è definita come  $\dim \mathcal{V} - \dim \mathcal{U}$ .

- l'intersezione di sottospazi è un sottospazio
- la combinazione lineare di sottospazi è un sottospazio
- ullet sottospazi di  $\mathbb{R}^3$  sono i piani e le rette per l'origine, e l'insieme  $\{0\}$

#### Combinazione Convessa

Ogni espressione della forma

$$\alpha_0 \mathbf{p}_0 + \dots + \alpha_d \mathbf{p}_d = \sum_{i=0}^d \alpha_i \mathbf{p}_i$$

tale che

$$\alpha_0 + \dots + \alpha_d = 1,$$

$$0 \le \alpha_0, \ldots, \alpha_d \le 1$$

è detta *combinazione convessa* dei punti  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_d$ .

## Segmenti, Triangoli, ...

#### ed altri simplessi

L'insieme di tutte le combinazioni convesse di  $\{\mathbf{p}_0,\ldots,\mathbf{p}_d\}$  è un insieme convesso, chiamato *guscio convesso* di  $\{\mathbf{p}_0,\ldots,\mathbf{p}_d\}$  e denotato  $\boxed{Conv\{\mathbf{p}_0,\ldots,\mathbf{p}_d\}}$ 

- il guscio convesso di 2 punti affinemente indipendenti è il segmento di cui sono estremi
- il guscio convesso di 3 punti affinemente indipendenti è il triangolo di cui sono vertici
- il guscio convesso di 4 punti affinemente indipendenti è il tetraedro di cui sono vertici

in  $\mathbb{E}^3$  non ci possono essere più di 4 punti affinemente indipendenti

### Trasformazioni

Una trasformazione lineare  $T: \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$  è una funzione tra spazi vettoriali che preserva le combinazioni lineari:

$$\mathbf{T}(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1\mathbf{T}\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{T}\mathbf{v}_n.$$

Una trasformazione affine  $\mathbf{T}:\mathbb{E}_1 o\mathbb{E}_2$  è una funzione tra spazi affini che preserva l'azione affine:

$$T(x + \alpha(y - x)) = Tx + \alpha(Ty - Tx).$$

Una trasformazione affine si estende con naturalezza allo spazio vettoriale sottostante, definendo

$$Tv = Ty - Tx$$
, dove  $v = y - x$ .

#### Tensori

Definiamo tensore T come sinonimo di "trasformazione lineare da  $\mathcal V$  a  $\mathcal V$ ".

Tensore è una mappa lineare  ${\bf T}$  che assegna ad ogni vettore  ${\bf u}$  un vettore

v = Tu.

## Prodotto Tensore e Scalare

Prodotto Tensore:  $u \otimes v = T$ 

Prodotto Scalare:  $u \cdot v = a$ 

Il prodotto tensore di due vettori  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$  è il tensore  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \in \text{lin } \mathcal{V}$  che mappa un vettore arbitrario  $\mathbf{v}$  nel vettore  $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}$ .

Più formalmente:

$$0\otimes:\mathcal{V}^2 o \mathsf{lin}\,\mathcal{V}:(\mathbf{a},\mathbf{b})\mapsto \mathbf{a}\otimes \mathbf{b}$$

tale che, per ogni  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ 

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}$$
.

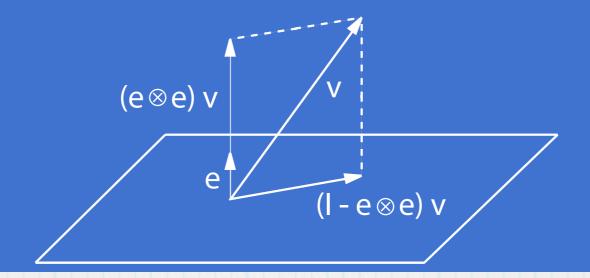
siano dati  $e, v \in \mathcal{V}$ , con e unitario. Il tensore  $e \otimes e$  applicato a v fornisce la proiezione di v nella direzione di e:

$$(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e})\mathbf{v} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}$$
.

il tensore  $I - e \otimes e$ , applicato a v, fornisce

$$(\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e})\mathbf{v} = \mathbf{v} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v})\mathbf{e},$$

la proiezione di v nel sottospazio lineare ortogonale a e



$$u \cdot u = |u|^2$$
  
Vettori Ortogonali:  $u \cdot v = 0$ 

## Composizione Tensori

il prodotto dei tensori  $\mathbf{S},\mathbf{T}\in\operatorname{lin}\mathcal{V}$  è definito come composizione di funzioni:

$$ST = S \circ T$$
.

Quindi (ST)v = S(Tv) per ogni  $v \in \mathcal{V}$ .

in PLasm, le trasformazioni lineari ed affini invertibili sono rappresentate, in un modo molto naturale, come funzioni. Pertanto il prodotto di tensori è dato dalla composizione di funzioni

## Spazio Euclideo

Uno spazio affine modellato sullo spazio vettoriale  $\Re^n$  ed equipaggiato con il prodotto scalare standard, sarà chiamato spazio Euclideo  $\mathcal{E}^n$ 

Un sistema coordinato cartesiano in uno spazio euclideo  $\mathcal{E}^n$  modellato su  $\Re^n$  consiste di una base ortonormale

$$\{\mathbf{e}_i\} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$$

in  $\Re^n$ , insieme a un punto  $\mathbf{o} \in \mathcal{E}^n$  chiamato origine.

In tale sistema le componenti di un vettore  $\mathbf{u}$  sono  $u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i$ . Analogamente, le coordinate di un punto  $\mathbf{x}$  saranno:

$$x_i = (\mathbf{x} - \mathbf{o}) \cdot \mathbf{e}_i$$

#### Tensori -> Matrici

quando sia data una base ortonormale  $(e_i)$  in  $\mathcal{V}$ , i componenti  $S_{ij}$  di un tensore  $S \in \text{lin } \mathcal{V}$  sono definiti come

$$S_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{S} \mathbf{e}_j$$

per questa definizione, il vettore  $\mathbf{v} = \mathbf{Su}$  può essere rappresentato per componenti rispetto alla base  $(\mathbf{e}_i)$  come  $(v_i)$ , con

$$v_i = \sum_j S_{ij} u_j$$

in altri termini, data una base, un tensore è rappresentato da una matrice

#### Tensori -> Matrici

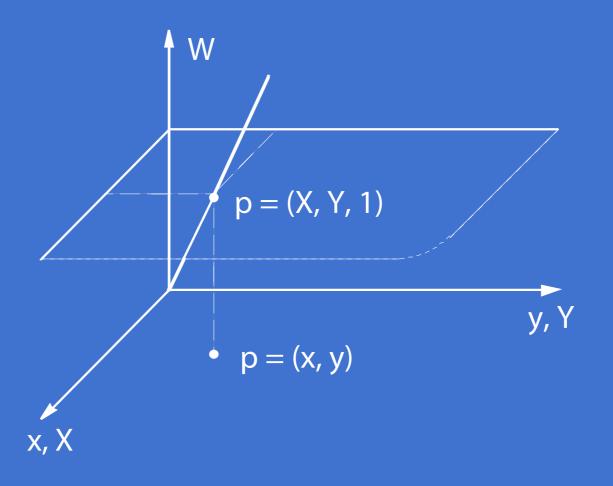
Le componenti di un tensore S si possono dunque raccogliere in una matrice quadrata, denotata [S]. Se  $\mathcal{V} = \Re^d$  scriveremo

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1d} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{d1} & S_{d2} & \cdots & S_{dd} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \sum_{i,j} S_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \qquad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j.$$

## Coordinate Omogenee

definiscono una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti del piano cartesiano e l'insieme delle rette per l'origine o dello spazio 3D



Coordinate omogenee del piano 2D

## Coordinate Omogenee

in tale corrispondenza  $\mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$ , ogni punto  $(x,y)^T \in \mathbb{E}^2$  è rappresentato come  $(X,Y,W)^T \in \mathbb{E}^3$ , tale che x=X/W, y=Y/W, con  $W \neq 0$ 

il punto  $(x,y)^T$  del piano viene ad essere rappresentato da ogni vettore del tipo  $\lambda(X,Y,1)^T$ , con  $\lambda\in\mathbb{R}$  e  $\lambda\neq0$ .

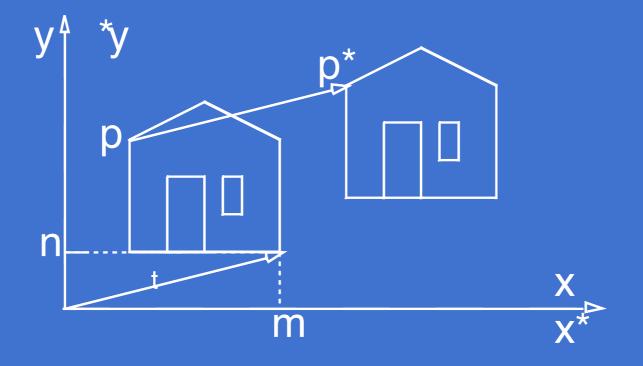
per andare dal vettore omogeneo  $\mathbf{p}' = (X,Y,W)$  al suo corrispondente punto cartesiano  $\mathbf{p} = (x,y)$  saranno necessarie due divisioni per la coordinata omogenea W.

per evitare questo calcolo si associa al punto  $(x,y)^T$  del piano la rappresentazione omogenea normalizzata  $(X,Y,1)^T$ , per la quale

#### Traslazioni

una traslazione del piano è una funzione  $\mathbf{T}:\mathbb{E}^2\to\mathbb{E}^2$ , dove un vettore fisso  $\mathbf{t}=(m,n)^T$  è sommato ad ogni punto  $\mathbf{p}=(x,y)^T$ , così che

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{T}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \mathbf{t} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+m \\ y+n \end{bmatrix}.$$



#### Traslazioni

lo spostamento dell'origine implica che la traslazione non sia una trasformazione lineare, e pertanto che non possa essere rappresentata in coordinate cartesiane con una matrice

la traslazione diventa lineare se usiamo coordinate omogenee. Infatti, la traslazione che mappa un punto  ${f p}$  in

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p} + \mathbf{t},$$

con  $\mathbf{t} = (m, n)^T$ , diventa, usando coordinate omogenee:

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{T} \, \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+m \\ y+n \\ 1 \end{bmatrix}$$

### Scalamento

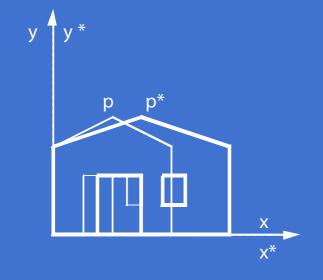
uno scalamento S è un tensore di trasformazione rappresentato da una matrice diagonale con coefficienti positivi, così da avere:

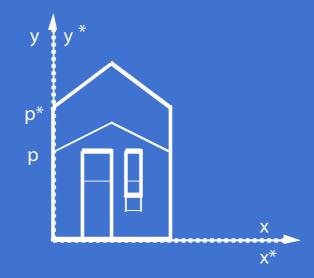
$$\mathbf{p}^* = \mathbf{S} \ \mathbf{p} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \end{bmatrix}, \qquad a, b > 0$$

- se a = b = 1, allora S è un tensore identità
- se a, b < 1, allora S produce una compressione

## Scalamento

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{S}_x \, \mathbf{p} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ y \end{bmatrix}$$





$$\mathbf{p}^* = \mathbf{S}_y \, \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ by \end{bmatrix}$$

#### Scalamento

la matrice normalizzata omogenea  $S' \in \mathbb{R}^3_3$  del tensore di scala 2D può essere derivata facilmente dalla corrispondente matrice non omogenea  $S \in \mathbb{R}^2_2$ , aggiungendo una riga e una colonna unitarie:

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{S}'\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \\ 1 \end{bmatrix}.$$

#### TeSin30

#### **TRASLAZIONI**

$$T(l, m, n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### **SCALAMENTI**

$$S(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Riflessione

trasformazione lineare definita da una matrice che differisce dall'identità perché uno dei coefficienti diagonali è pari a-1

due riflessioni elementari  $\mathbf{M}_x$  e  $\mathbf{M}_y$  nel piano  $\mathbb{E}^2$ 

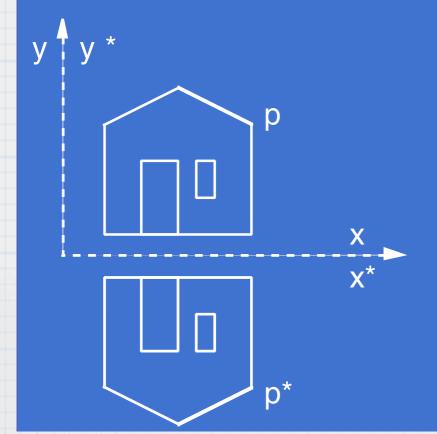
$$\mathbf{M}_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{M}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

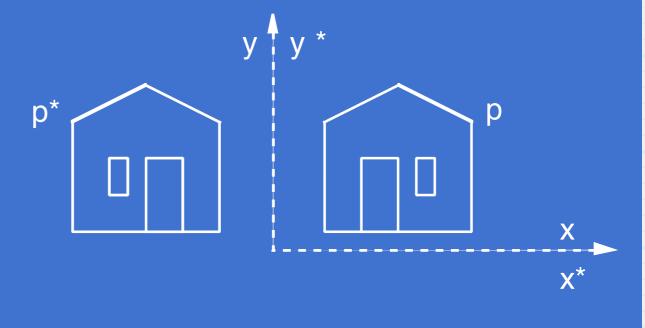
l'effetto di un tensore di riflessione è quello di cambiare di segno una sola delle coordinate dei punti

## Riflessione

la rappresentazione omogenea normalizzata di tali trasformazioni si ottiene aggiungendo una riga e colonna unitarie alle loro matrici

$$\mathbf{M}_x' = \left[ egin{array}{ccc} \mathbf{M}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{array} 
ight], \qquad \mathbf{M}_y' = \left[ egin{array}{ccc} \mathbf{M}_y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{array} 
ight]$$





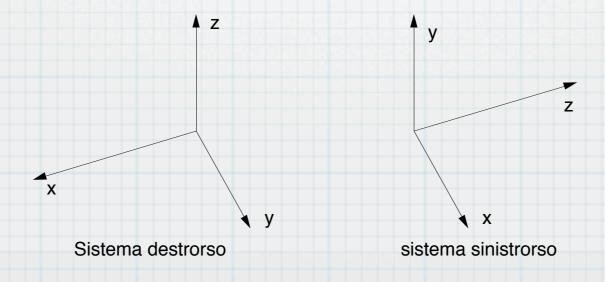
#### Orientamento Assi

#### ROTAZIONI POSITIVE

Si considerano *positive* le rotazioni che portano

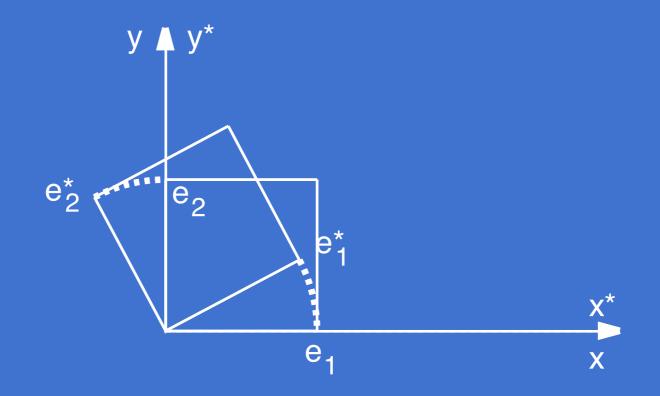
$$e_1 \rightarrow e_2, \quad e_2 \rightarrow e_3, \quad e_3 \rightarrow e_1$$

In sistemi destrorsi le rotazioni positive sono antiorarie, e orarie in sistemi sinistrorsi



#### Rotazione

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$



### Rotazione

la matrice omogenea normalizzata  $\mathbf{R}'\in\operatorname{lin}\mathbb{R}^3$  di una rotazione del piano si ottiene dalla matrice non omogenea  $\mathbf{R}\in\operatorname{lin}\mathbb{R}^2$ 

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{R}'\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

nel modo usuale, orlando la matrice originaria con l'identità ...

#### Rotazioni in 30

Ciascuna rotazione elementare si ottiene immergendo opportunamente la matrice di rotazione (del piano) nella matrice identità  $4 \times 4$ :

$$\mathbf{R}_{x}(\alpha) \equiv \mathbf{R}_{yz}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{y}(\beta) \equiv \mathbf{R}_{xz}(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{z}(\gamma) \equiv \mathbf{R}_{xy}(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Peformazioni

piano visto come fascio di rette parallele a un asse coordinato

uno scorrimento elementare 2D è un tensore che mappa i punti di ogni retta in altri punti della stessa retta, in modo tale che:

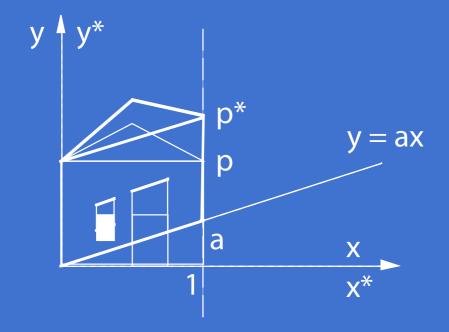
- tutti i punti di ogni retta traslino dello stesso vettore
- solo l'asse coordinato parallelo al fascio resti fisso
- la traslazione di ogni retta sia proporzionale alla sua distanza da tale asse coordinato

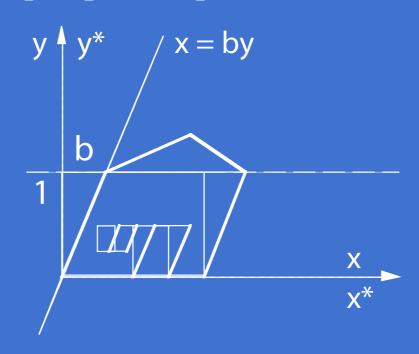
# Peformazioni

un tensore di scorrimento elementare non muta una coordinata, mentre l'altra cambia linearmente con il valore della coordinata fissa

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{H}_x \; \mathbf{p} = \left[ egin{array}{ccc} 1 & 0 \ a & 1 \end{array} \right] \left[ egin{array}{ccc} x \ y \end{array} \right] = \left[ egin{array}{ccc} x \ y + ax \end{array} \right],$$

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{H}_y \; \mathbf{p} = \left[ egin{array}{cc} 1 & b \ 0 & 1 \end{array} \right] \left[ egin{array}{c} x \ y \end{array} \right] = \left[ egin{array}{c} x+by \ y \end{array} \right].$$





azione di  $\mathbf{H}_x$ , normale all'asse x, e  $\mathbf{H}_y$ , normale all'asse y

# Petormazioni 3P

Una deformazione elementare nello spazio 3D è una trasformazione che lascia invariata una coordinata e modifica le altre due linearmente con la coordinata invariata.

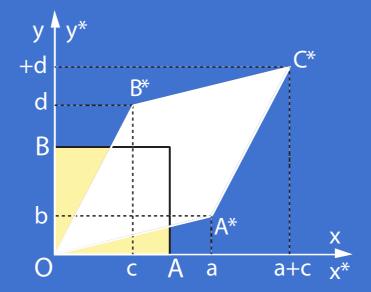
$$\mathbf{D}_x = \mathbf{D}_x(d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d_y & 1 & 0 & 0 \\ d_z & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_y = \mathbf{D}_y(d_x, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & d_x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_z = \mathbf{D}_z(d_x, d_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x & 0 \\ 0 & 1 & d_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Trasformazione arbitraria

azione di un tensore arbitrario sul quadrato unitario standard



oppure, usando le corrispondenti coordinate:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & c & a+c \\ 0 & b & d & b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se un punto p viene sottoposto ad una successione di trasformazioni  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_n$ , scriveremo:

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{Q}_n \cdots \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{p}.$$

Non servono parentesi perchè il prodotto di matrici è associativo. Si ha infatti:

$$(Q_1Q_2) Q_3 = Q_1 (Q_2Q_3)$$

In generale il prodotto di matrici non è invece commutativo:

$$Q_1Q_2 \neq Q_2Q_1$$
.

- (a) il prodotto di rotazioni è commutativo;
- (b) il prodotto di traslazioni è commutativo;
- (c) il prodotto di scalamenti è commutativo;
- (d) il prodotto di rotazioni e scalamenti omogenei è commutativo.

(a) traslazioni e rotazioni posseggono una componibilità additiva:

$$T(m_1, n_1) T(m_2, n_2) = T(m_1 + m_2, n_1 + n_2)$$
  
 $R(\alpha_1) R(\alpha_2) = R(\alpha_1 + \alpha_2)$ 

(b) trasformazioni di scala posseggono una componibilità moltiplicativa:

$$S(a_1, b_1) S(a_2, b_2) = S(a_1a_2, b_1b_2)$$

$$\mathbf{T}^{-1}(m,n) = \mathbf{T}(-m,-n)$$

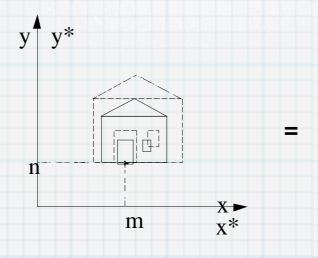
$$\mathbf{R}^{-1}(\alpha) = \mathbf{R}(-\alpha)$$

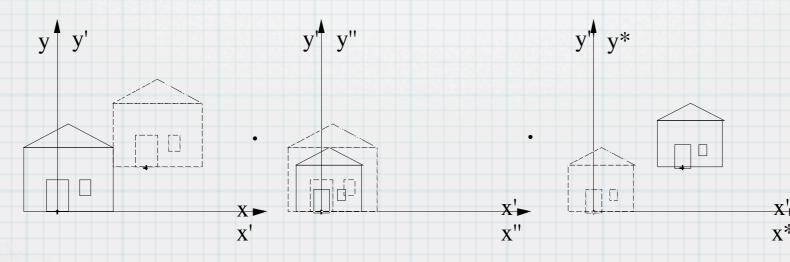
$$\mathbf{S}^{-1}(a,b) = \mathbf{S}\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$$

### **SCALAMENTO**

intorno al punto fisso  $\mathbf{q} \neq \mathbf{o}$ , con  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ :

$$\mathbf{S_q} = \mathbf{S}(m, n, s_x, s_y)$$
$$= \mathbf{T}(m, n) \mathbf{S}(s_x, s_y) \mathbf{T}(-m, -n)$$

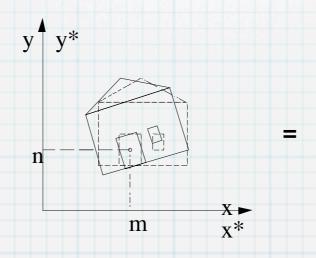


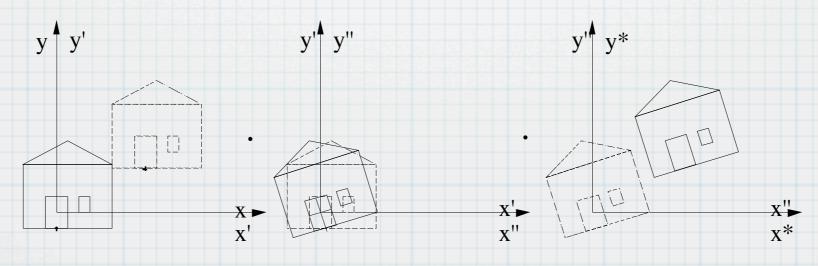


#### ROTAZIONE

intorno al punto fisso  $\mathbf{q} \neq \mathbf{o}$ , con  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{q}} = \mathbf{R}(m, n, \alpha)$$
$$= \mathbf{T}(m, n) \mathbf{R}(\alpha) \mathbf{T}(-m, -n)$$





# Rotazioni Qualunque

Per calcolare la matrice

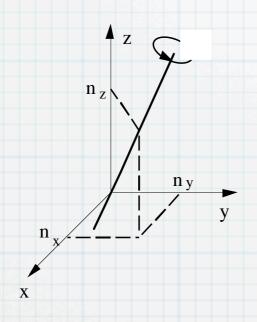
$$R = R(n, \alpha)$$

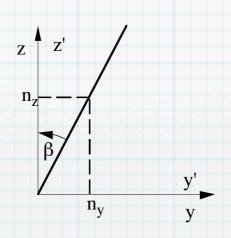
di una rotazione qualunque, con asse per l'origine di direzione

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

Si ruoterà intorno agli assi x e y in modo da annullare le corrispondenti componenti di  $\mathbf{n}$ , quindi si effettuerà una rotazione di  $\alpha$  intorno a z. Infine si dovranno effettuare, in ordine inverso, le rotazioni inverse:

$$\mathbf{R}_x(-\beta) \ \mathbf{R}_y(-\gamma) \ \mathbf{R}_z(\alpha) \ \mathbf{R}_y(\gamma) \ \mathbf{R}_x(\beta)$$

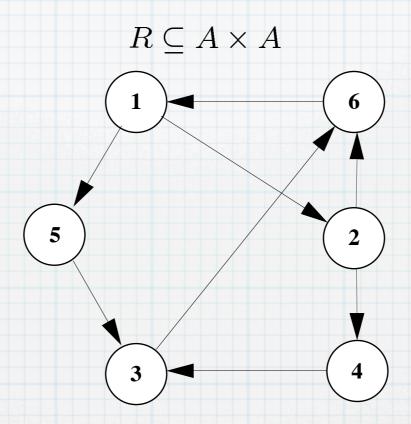




$$\beta = \arctan\left(\frac{n_y}{n_z}\right)$$

$$\gamma = -\arctan\left(\frac{n'_x}{n'_z}\right)$$
 dove  $\mathbf{n'} = \mathbf{R}_x(\beta) \mathbf{n}$ .

Si dice grafo orientato G la coppia (A,R) con



A insieme finito non vuoto detto insieme dei nodi

R insieme di coppie ordinate detto insieme degli archi

In una struttura le parti componenti sono descritte in un sistema di coordinate ad essa associato e detto *sistema locale* della struttura

Ogni componente di una struttura gerarchica e' definito in un sistema locale di coordinate

Il sistema locale assume (induttivamente) il ruolo di sistema mondo WC (World coordinates) per le parti componenti.

### SOGGIORNO

